Тема "Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Смяна на базиса. Трансформация на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса. Подобни матрици." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

Твърдим, че за линейно изображение $\varphi : U \to V$, наредена m-торка $u = (u_1, ..., u_m), u_1, ..., u_m \in U$ и матрицата $A = (a_{ij})_{i=1 j=1}^{m\ n} \in M_{m\times n}(F)$: $\quad \varphi(uA) = \varphi(u)A, \quad$ където

$$uA := (v_1, ..., v_n), \qquad v_j := (u_1, u_2, ..., u_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i,$$

$$\varphi(uA) = \varphi(v_1, ..., v_n) := (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n)) \quad \text{и} \quad \varphi(u) := (\varphi(u_1), ..., \varphi(u_m))$$

Доказателство: Забелязваме, че

$$\varphi(v_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varphi(u_i) = (\varphi(u_1), ..., \varphi(u_m))\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

□

По определение, за линейно изображение на крайномерни пространства над поле F $\varphi : U \to V$, базис $e = (e_1, ..., e_n)$ на U и базис $f = (f_1, ..., f_n)$ на V, матрицата $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) \in M_{m\times n}(F)$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e и f. Еквивалентно $\varphi(e) = fA$ за $\varphi(e) := (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$.

Твърдим, че за линейно пространство U над поле F, с линейно независими вектори $u_1, ..., u_m$, $u = (u_1, ..., u_m)$ и матрици $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}, B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{m\times n}(F)$:

1) $uA = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, ..., \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n} \implies A = \mathcal{O}_{m\times n}$ $\qquad$ 2) $uA = uB \implies A = B$

(Матрична форма на линейната независимост на вектори)

Доказателство: 1) След сравняването на j-тите компоненти ($j \in \{1, ..., n\}$) от двете страни, стигаме до:

$$\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathcal{O}} \qquad \sum_{s=1}^{m} a_{s,j}u_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

Обаче, понеже $u_1, ..., u_m$ са линейно независими, то $a_{s,j} = 0\ \forall s \in \{1, ..., m\}$. Следователно $A = \mathcal{O}_{m\times n}$

2) Щом $uA = uB$, то $u(A - B) = uA - uB = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, ..., \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n} \implies A - B = \mathcal{O}_{m\times n} \implies A = B.$ □

По определение, за n-мерно пространство U с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и линеен оператор $\varphi : U \to U$, матрицата $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) \in M_{n\times n}(F)$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e. Еквивалентно, $\varphi(e) = eA$.

По определение, за линейно пространство V над поле F с базиси $e = (e_1, ..., e_n)$ и $f = (f_1, ..., f_n)$,

$$\text{матрицата } T = (f_1, ..., f_j, ..., f_n) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1j} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2j} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nj} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F),$$

$$\text{където } f_1 = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, ..., f_n = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix} \in V$$

наричаме матрица на прехода от базиса e към базиса f. Еквивалентно, $f = (f_1, ..., f_n) = (e_1, ..., e_n)T = eT$.

Твърдим, че за линейно пространство V над поле F с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и за матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, T е матрица на прехода от базиса e към базиса $f = (f_1, ..., f_n) = eT \iff T$ е неособена.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Щом $f = eT$ е базис на V, то съществува матрица на прехода $S \in M_{n\times n}(F)$, за която $e = fS$. Тогава $eE_n = e = fS = (eT)S = e(TS) \implies E_n = TS$ (Лемата за матрична форма на линейната независимост на вектори). Следователно T е обратима и от там неособена матрица.

($\Leftarrow$) Ако $\det(T) \neq 0$, то вектор-стълбовете на T са линейно независими (предишно твърдение). Следователно векторите $f_1, ..., f_n$, образуващи вектор-стълбовете на T с координати спрямо базиса $e_1, ..., e_n$, образуват базис на V (твърдение от миналата тема). □

Твърдим, че за линейно пространство V с базиси $e = (e_1, ..., e_n)$ и $f = (f_1, ..., f_n)$, матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към f и произволен вектор $v \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$ съответно спрямо двата базиса, е изпълнено равенството $x = Ty$.

Доказателство: Щом $f = eT$ и $ex = v = fy$, то $ex = fy = (eT)y = e(Ty) \implies x = Ty$ (Лемата за матрична форма на линейната независимост на вектори). □

Твърдим, че за линейно пространство U с базиси $e = (e_1, ..., e_n)$ и $e' = eT$ (с матрица на прехода T), линейно пространство V с базиси $f = (f_1, ..., f_n)$ и $f' = fS$ (с матрица на прехода S) и линейно изображение $\varphi : U \to V$ с матрица A спрямо базисите e и f, матрицата B на φ спрямо базисите e' и f' изпълнява равенството $B = S^{-1}AT$.

Доказателство: По определение, $\varphi(e) = fA$ и $\varphi(e') = f'B$, заместваме с $e' = eT$ и $f' = fS$ (определение на матрица на прехода между два базиса). След прилагане на лемата за матричен запис на линейността на изображение и използване на асоциативността на умножението на матрици, стигаме до $f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B = (fS)B = f(SB)$. От лемата за матрична форма на линейната независимост на вектори, $AT = SB$ и от минало твърдение, матрицата на прехода S е обратима и $B = S^{-1}AT$. □

По определение, квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ с един и същ размер са подобни, ако съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, за която $B = T^{-1}AT$.

Твърдим, че за n-мерно линейно пространство V над полето F, квадратните матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са подобни $\iff$ съществува линеен оператор с тези матрици спрямо подходящи базиси.

Доказателство: ($\Leftarrow$) От предишното твърдение, за линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо базис e, матрицата на φ спрямо базис $e' = eT$ ще бъде $B = T^{-1}AT$ и следователно A и B са подобни.

($\Rightarrow$) Нека $B = T^{-1}AT$, $e = (e_1, ..., e_n)$ да бъде базис на V и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с матрица A спрямо базиса e. е неособена, следователно $e' = eT$ е базис на V (минало твърдение). То тогава, матрицата на φ спрямо базиса e' е $T^{-1}AT = B$ (минало твърдение). □